

케일리-해밀턴 정리

행렬 A 가 $n \times n$ 차원이고, A 의 고유치 λ_i 가 상이 ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$)

$$\begin{aligned} f[At] &= e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{At^2}{2!} + \frac{At^3}{3!} + \dots \\ &= \alpha_1(t) I + \alpha_2(t) A + \alpha_3(t) A^2 + \dots + \alpha_n(t) A^{n-1} \end{aligned}$$

$$f[\lambda_i t] = e^{\lambda_i t} = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \lambda_i + \alpha_3(t) \lambda_i^2 + \dots + \alpha_n(t) \lambda_i^{n-1}$$

좌표계 변환 공식

■ 직각좌표계

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

■ 원통좌표계

$$A(r, \phi, z) = A_r a_r + A_\phi a_\phi + A_z a_z = (A_x \cos[\phi] + A_y \sin[\phi]) a_r + (-A_x \sin[\phi] + A_y \cos[\phi]) a_\phi + A_z a_z$$

■ 구좌표계

$$\begin{aligned} A(r, \theta, \phi) &= A_r a_r + A_\theta a_\theta + A_\phi a_\phi \\ &= (A_x \sin[\theta] \cos[\phi] + A_y \sin[\theta] \sin[\phi] + A_z \cos[\theta]) a_r + \\ &\quad (A_x \cos[\theta] \sin[\phi] + A_y \cos[\theta] \sin[\phi] - A_z \sin[\theta]) a_\theta + (-A_x \sin[\phi] + A_y \cos[\phi]) a_\phi \end{aligned}$$

오일러의 공식

$$e^{i\omega t} = \cos[\omega t] + i \sin[\omega t]$$

$$e^{-i\omega t} = \cos[\omega t] - i \sin[\omega t]$$

$$\cos[\omega t] = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$\sin[\omega t] = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$$e^{\omega t} = e^{i(-i\omega)t} = \cos[-i\omega t] + i \sin[-i\omega t] = \cosh[\omega t] - i \sinh[\omega t]$$

$$e^{-\omega t} = e^{i(i\omega)t} = \cos[i\omega t] + i \sin[i\omega t] = \cosh[\omega t] + i \sinh[\omega t]$$

$$\cosh[\omega t] = \cos[i\omega t] = \frac{1}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

$$\sinh[\omega t] = -i \sin[i\omega t] = \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

주요 삼각함수 관련 공식

$$\cos[x \pm y] = \cos[x] \cos[y] \mp \sin[x] \sin[y]$$

$$\cos[x - y] - \cos[x + y] = 2 \sin[x] \sin[y]$$

$$\cos[x - y] + \cos[x + y] = 2 \cos[x] \cos[y]$$

$$\sin[x \pm y] = \sin[x] \cos[y] \pm \cos[x] \sin[y]$$

$$\sin[x + y] - \sin[x - y] = 2 \cos[x] \sin[y]$$

$$\sin[x + y] + \sin[x - y] = 2 \sin[x] \cos[y]$$

$$\cos[a] \cos[b] = \frac{1}{2} (\cos[a + b] + \cos[a - b])$$

$$\sin[a] \cos[b] = \frac{1}{2} (\sin[a + b] + \sin[a - b])$$

주요 함수의 라플라스 변환 및 푸리에 변환

■ 라플라스 변환 공식

$$F[s] = \int_{-\infty}^{\infty} f[t] e^{-s t} dt$$

$$f[t] = \frac{1}{2 \pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F[s] e^{s t} ds$$

■ 주기함수의 푸리에 급수(주기 T가 유한할 때)

$$f[t] = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos[n t] + b_n \sin[n t]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i 2 \pi n t / T}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f[t] e^{-i n \omega_0 t} dt$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$C_n = \frac{(a_n - i b_n)}{2}$$

$$C_{-n} = \frac{(a_n + i b_n)}{2}$$

■ 비주기함수의 푸리에 변환(주기 T가 무한일 때)

$$F[\omega] = \int_{-\infty}^{\infty} f[t] e^{-i \omega t} dt$$

$$f[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[\omega] e^{i\omega t} d\omega$$

테일러 급수와 매클로린 급수, 로랑급수

■ 테일러 급수 ($x = x_0$ 근방에서 함수 $f[x]$ 를 전개함)

$$f[x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}[x_0]}{k!} (x - x_0)^k =$$

$$f[x_0] + \frac{f'[x_0]}{1!} (x - x_0) + \frac{f''[x_0]}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}[x_0]}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

■ 매클로린 급수 (원점인 $x=0$ 근방에서 함수 $f[x]$ 를 전개함)

$$f[x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}[0]}{k!} x^k = f[0] + \frac{f'[0]}{1!} x + \frac{f''[0]}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}[0]}{n!} x^n + \dots$$

■ 로랑 급수 ($f[z]$ 가 특이점을 갖는 경우에 대한 테일러 급수의 확장)

$$f[z] = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f[z]}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f[z] (z - z_0)^{n+1} dz$$